



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Lokální hustota

### Definice a základní vlastnosti

Radim Adolt

Ústav pro hospodářskou úpravu lesů Brandýs nad Labem (ÚHÚL),  
pobočka Kroměříž, Analyticko-metodické Centrum Národní Inventarizace Lesů (ACNIL)



- 1 Funkce lokální hustoty
- 2 Vybrané výběrové protokoly
  - Bodový výběr
  - Kruhové zkusné plochy
  - Liniové transekty
- 3 Modifikace lokální hustoty
- 4 Praktické ukázky a diskuze



**Funkci lokální hustoty** zavedl ve své dizertační práci Mandallaz [1991, sekce 3.1, od strany 18]. Základní vlastnost vyjadřuje rovnice

$$\int_D Y(x) dx = Y. \quad (1)$$

**Součet lokální hustoty  $Y(x)$  na všech bodech  $x$  zájmové oblasti  $D \subset \mathbb{R}^2$  je roven hodnotě úhrnu  $Y$  této veličiny.**

Očekávaná hodnota lokální hustoty v  $D$  je rovna střední hodnotě veličiny v zájmové oblasti  $D$

$$\mathbb{E}[Y(x)] = \frac{1}{\lambda(D)} \int_D Y(x) dx = \bar{Y}, \quad (2)$$

kde  $\lambda(D)$  označuje velikost  $D$ .



## Přirozenost a jednoduchost

Odhad parametrů je následně prováděn způsobem odpovídajícím **nekonečně velkým populacím kontinua**. Vyhýbáme se **nedokonalostem metodiky pro konečné populace** aplikované na odhady NIL:

- **$D$  nemůže být bezezbytku dělena kruhovými zkusnými plochami** popřípadě plochami jiného tvaru<sup>a</sup>
- **neznámá velikost populací** například populace kmenů
- **nejasnost definice elementů některých populací**<sup>b</sup> například mrtvé dříví, toky, lesní dopravní síť . . .

<sup>a</sup>Zkusné plochy nejsou elementy populace!

<sup>b</sup>Komplikace při sběru a částečně i vyhodnocení dat.



## Flexibilita

Výběrové šetření lze pro každý cílový parametr navrhnout tak, abychom **pro kterýkoli inventarizační bod mohli lokální hustotu vyhodnotit.**

## Jednotnost zpracování odhadů

Po zavedení lokální hustoty lze všechny cílové parametry odhadovat na základě jednotné teorie, kterou je **Horwitz-Thompsonův teorém pro populace kontinua** [Cordy, 1993].



V typickém případě je bodový výběr **používán k odhadu rozlohy různě definovaných podoblastí**<sup>1</sup> v rámci  $D$ .

Lokální hustota je zde definována jako **indikátorová proměnná** vyjadřující příslušnost inventarizačního bodu  $x$  ke kategorii území  $K$

$$I_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } x \in K \\ 0 & \text{když } x \notin K. \end{cases} \quad (3)$$

Pro různé kategorie území jsou indikátorové proměnné definovány analogicky. **Ostatní výběrové protokoly jsou po zavedení lokální hustoty převedeny de facto na bodový výběr**<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Například rozlohy kategorie pozemků  $K$ .

<sup>2</sup>Lokální hustota však již nemá charakter indikátorových proměnných.



Následující popis a značení jsou převzaty z monografie Mandallaze [2007, sekce 4.2 od strany 55].

Na každém inventarizačním bodě  $x$  definujeme **koncentrické kruhové segmenty**  $K_r$  (jeden, většinou však dva nebo tři).

**Kmen  $i$  je vybrán tehdy a jen tehdy, když se nachází uvnitř kruhu  $K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, y) \leq r\}$  o poloměru  $r$ , se středem  $x$ .** Označení  $d(x, y)$  je použito pro Eukleidovskou vzdálenost mezi  $x$  a  $y$  (jakýmkoli bodem uvnitř kruhu).

**Poloha kmene je dána kolmým průmětem bodu na ose kmene ve výčetní výšce do roviny - kartografického zobrazení (S-JTSK).**



Dále definujeme **náhodnou indikátorovou proměnnou**  $I_i(x)$  pro kmen  $i$  a inventarizační bod  $x$ :

$$I_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{když } u_i \in K_r(x) \\ 0 & \text{když } u_i \notin K_r(x). \end{cases} \quad (4)$$

Definujme také  **$N$  kruhů**  $K_i(r) = K_r(u_i)$  s konstantním poloměrem  $r$  a se středy  $u_i$  na polohách kmenů. **Kmen  $i$  je vybrán právě tehdy a jen tehdy, když kterýkoli z inventarizačních bodů označený  $x$  padne do kruhu  $K_i(r)$**

$$I_i(x) = 1 \Leftrightarrow x \in K_i(r). \quad (5)$$

Kruh  $K_i(r)$  nazýváme **zónou zahrnutí** kmene  $i$  do výběru.





## Definice lokální hustoty

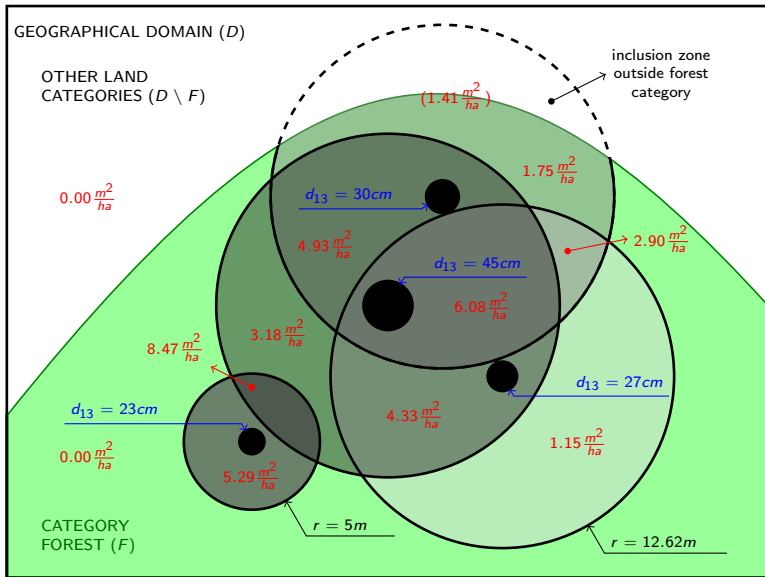
**Lokální hustota** popsaného výběrového protokolu je dána

$$Y(x) = \sum_{i \in \mathcal{P}} \frac{l_i(x) Y_i}{\lambda(K_i \cap F \cap A)}. \quad (6)$$

- $\lambda(K_i)$  je velikost kruhového segmentu  $K_i$  kmene  $i$  daná výběrovým protokolem
- $\mathcal{P}$  je konečná populace kmenů nacházející se v dostupné oblasti  $A$  v rámci  $D$  a uvnitř kategorie pozemků les  $F$
- $Y_i$  je pozorovaná hodnota veličiny na kmeni  $i$ , jejíž úhrn respektive střední hodnotu  $D$  chceme odhadnout
- $Y(x)$  vyhovuje (1) and (2)
- $\lambda(K_i \cap F \cap A)$  je společná plocha oblastí  $K_i$ ,  $F$  and  $A$

Definice (6) předpokládá, že měření neprobíhá na inventarizačních bodech mimo kategorii les nebo v nedostupných částech  $D$ . Plocha uvažovaná ve jmenovateli lokální hustoty automaticky kompenzuje **okrajový efekt**, ke kterému při neprovedení měření v uvedených případech dochází.

# Kruhové zkušné plochy IV



## Nastavení zón zahrnutí

Každému kmeni  $i$  je přiřazena **zóna zahrnutí, jejíž velikost závisí na vlastnostech kmene  $i$  - typicky na výčetní tloušťce  $d_{13i}$ , méně často na výšce  $h_i$ , dřevině apod.** V rámci **inventarizační sítě NIL1** jsou pro kmeny hroubí ( $d_{13i} \geq 7 \text{ cm}$ ) používány dvě velikosti kruhových segmentů:

$$r_{i_{NIL2}} = \begin{cases} 3.00 \text{ m} & \text{pro kmeny } 7 \text{ cm} \leq d_{13i} < 12 \text{ cm} \\ 12.62 \text{ m} & \text{pro kmeny } d_{13i} \geq 12 \text{ cm} \end{cases} \quad (7)$$

**V síti NIL2** jsou používány dvě velikosti kruhových segmentů, které byly získány **optimalizací na základě dat NIL1**:

$$r_{i_{NIL2}} = \begin{cases} 5.00 \text{ m} & \text{pro kmeny } 7 \text{ cm} \leq d_{13i} < 27 \text{ cm} \\ 12.62 \text{ m} & \text{pro kmeny } d_{13i} \geq 27 \text{ cm} \end{cases} \quad (8)$$



## Relaskopická metoda

- **Bitterlichova metoda, Angle Count Sampling**
- **PPS - Probability Proportional to Size** - optimální výběrový postup, v ideálním (teoretickém) případě poskytuje zcela přesné odhady (kruhová základna)
- **každému kmeni je přiřazena kruhová zóna zahrnutí** o poloměru

$$r_i = d_{13i}/2\sqrt{f}, \quad (9)$$

kde  $f = 10^4 \sin^2(\alpha/2)$  je **relaskopický faktor** v  $m^2/ha$  a  $\alpha$  je **záměrný úhel relaskopické pomůcky** ve stupních



## Geometrická definice pravděpodobnosti výběru kmene

**Pravděpodobnost**  $\pi_i$  **zahrnutí kmene**  $i$  **do výběru** je dána poloměrem zóny zahrnutí  $\lambda(K_i \cap F \cap A)$ , rozlohou domény  $D$  a očekávaným počtem  $\bar{n}_D$  inventarizačních bodů v  $D$ :

$$\pi_i = \mathbb{P}[I_i(x) = 1] = \mathbb{E}[I_i(x)] \quad (10)$$

$$\pi_i = \frac{\bar{n}_D \lambda(K_i \cap F \cap A)}{\lambda(D)} = \frac{\lambda(K_i \cap F \cap A)}{\lambda(c)} \quad (11)$$

Předpokládá se, že na inventarizačních bodech **mimo kategorii les nebo na nepřístupných částech**  $D$  se **neprovádí šetření** ani v případě, že došlo k výběru byť jediného kmene.

Podíl  $\bar{n}_D/\lambda(D)$  odpovídá převrácené hodnotě **velikosti inventarizačního bloku**  $\lambda(c)$ .



## Okrajový efekt při výběru na kruhových plochách

- vzniká v důsledku **nezakládání inventarizačních bodů nacházejících se mimo kategorii les a na nepřístupných lokalitách, ačkoli některým z kruhových segmentů jsou vybrány kmeny uvnitř  $F \cap A$**
- kmeny při okraji  $F \cap A$  mají **menší zóny zahrnutí** -  $\lambda(K_i \cap F \cap A) < \lambda(K_i)$
- nelze-li zjistit upravenou velikost zón zahrnutí<sup>a</sup>, musí se provést **kompensace přímo při sběru dat v terénu**
- metody kompenzace viz Gregoire and Valentine [2008, sekce 7.5 od strany 223],
- okrajových efekt působí **podhodnocení odhadů úhrnů a středních hodnot**
- konkrétní velikost podhodnocení závisí na relativní velikosti kruhových segmentů vzhledem k délce okrajů oblasti  $F \cap A$ ,
- **podhodnocení může být interpretačně významné**

<sup>a</sup>Vyžadováno mapování okraje  $F \cap A$  do vzdálenosti alespoň dvojnásobku poloměru největšího použitého kruhového segmentu od inventarizačního bodu.

## Optimalizace nastavení kruhových segmentů

- postup navrhl Mandallaz [2007, sekce 9.4 od strany 161]
- **diskrétní aproximace relaskopické metody**
- optimalizuje se jak **velikost segmentu** a **registrační hranice**  $d_{1.3}$
- postup vede k optimálnímu poměru přesnosti odhadu<sup>a</sup> a počtu registrovaných kmenů
- **podkladem je rozdělení četností objemů či kruhových ploch v populaci kmenů**

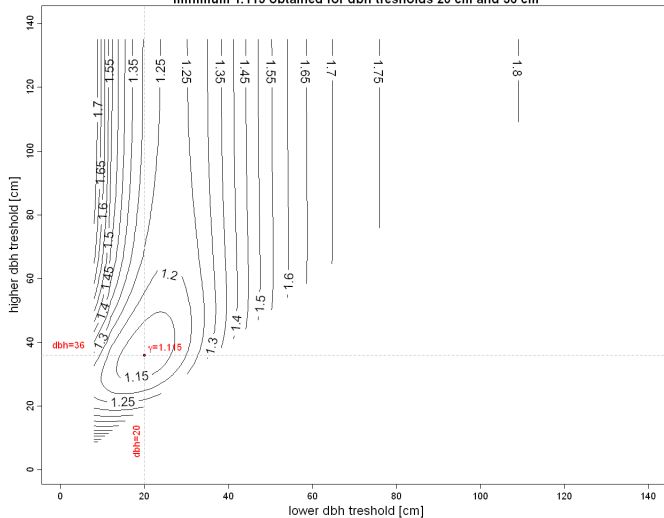
---

<sup>a</sup>Zásoby hroubí nebo kruhové výčetní základny hroubí.



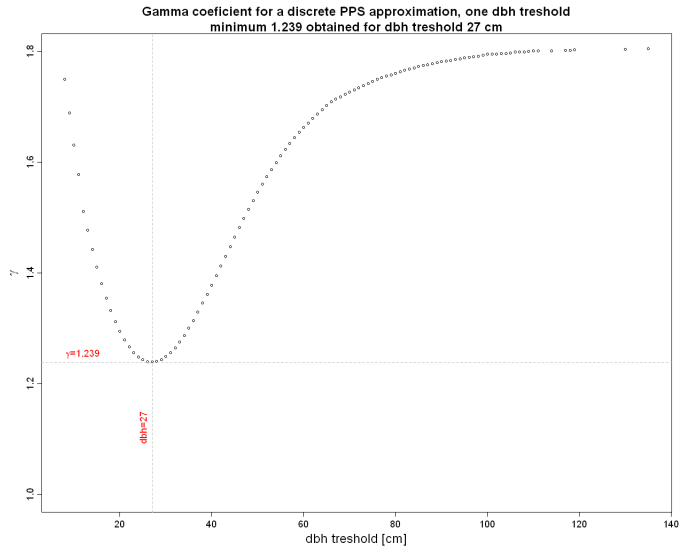
# Kruhové zkusné plochy X

Gamma coefficient for a discrete PPS approximation, two dbh thresholds  
minimum 1.115 obtained for dbh thresholds 20 cm and 36 cm





# Kruhové zkusné plochy XI



## Geometrie transektu

- 1 **transekty s jednoduchou geometrií** - úsečka s výchozím bodem na některém ze svých konců
- 2 **segmentované transekty** - více transektů s jednoduchou geometrií nazývané segmenty
  - **společný výchozí bod** pro všechny segmenty například transekt ve tvaru úsečky s výchozím bodem v jejím středu (dva segmenty vycházející z téhož bodu opačným směrem), nebo transekt ve tvaru písmene Y, kříže apod.
  - **výchozí body napojené na čelní konce** předcházejících segmentů například transekt ve tvaru čtverce či trojúhelníku
  - **teoreticky možné kombinace obou variant**

Některý z výchozích bodů bývá v praxi shodný s inventarizačním bodem generovaným dle zvoleného výběrového designu (inventarizační síť). Nejedná se o pravidlo, výjimkou je například čtvercový nebo trojúhelníkový transekt s těžištěm v inventarizačním bodě.



## Orientace transektu

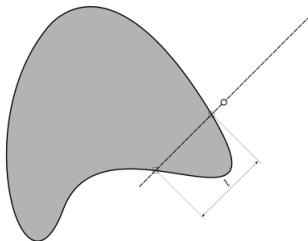
- 1 **rotované transekty** - orientace transektu je volena náhodně
  - **v rámci replikace výběrového designu** - náhodná orientace transektu na každém z generovaných inventarizačních bodů
  - **náhodná rotace mezi replikacemi výběrového designu** - transekty vytyčené na inventarizačních bodech mají stejnou orientaci, při novém generování inventarizační sítě se tato orientace může změnit, avšak všechny v rámci replikace vytyčené transekty budou mít vždy stejnou orientaci
- 2 **transekty s pevnou orientací** - orientace transektů se nemění mezi jednotlivými inventarizačními body dané replikace ani mezi replikacemi výběrového designu

V případě nerotovaných transektů je třeba používat metody odhadu, které explicitně zohledňují relativní postavení transektu a jím vybraného objektu - **odhady podmíněné orientací transektu** [Gregoire and Valentine, 2008, sekce 9.2.2 od strany 283]. Jinak jsou odhady nestranné pouze za předpokladu náhodné orientace elementů šetřené populace (transektem vybíraných objektů).



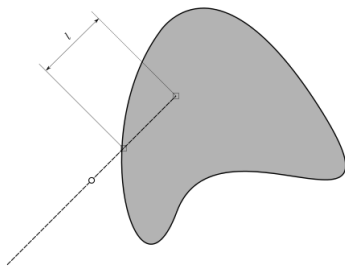
## Úplné protnutí dle Kaisera[1983]

Celkový počet protnutí půdorysu objektu transektem je stejný jako počet protnutí, ke kterému dochází prodloužením transektu na obě strany do nekonečna tj. přímkou obsahující transekt (koincidentní přímkou).



## Částečné protnutí dle Kaisera[1983]

Transekt protíná půdorys objektu alespoň jednou a celkový počet protnutí je nižší než, ke kterému dochází koincidentní přímkou.



## Výběr objektu liniovým transektem

**Původní definice výběrového protokolu dle Kaisera[1983]:**

- **objekt je vybrán liniovým transektem**, pokud je **úplně nebo částečně protnut čelním koncem** ramene transektu
- **objekt není vybrán liniovým transektem**, pokud je protnut **částečně výchozím koncem** ramene transektu



## Délka liniových objektů, rotované transekty

**Lokální hustota** pro odhad celkové délky liniových objektů je dána [Gregoire and Valentine, 2008, příklad 9.11 od strany 296]

$$Y(x) = \frac{\Pi}{2L} \sum_{k \in \mathbb{L}_x} t_k. \quad (12)$$

- $L$  je **nominální délka transektu** v metrech
- $\mathbb{L}_x$  je **množina liniových objektů protnutých transektem**
- $\Pi$  je v tomto kontextu **Ludolfovo číslo** nikoli pravděpodobnost výběru objektu  $k$
- **násobný faktor**  $t_k = 1$  je použit **pro kompenzaci okrajového efektu** metodou odrazu dle Gregoire and Valentine [2008, sekce 9.7 od strany 299]
- pro konkrétní liniový objekt je násobný faktor zvýšen o **počet opakovaných protnutí odrazy transektu od okrajů oblasti**, v nichž se musí nacházet inventarizační bod, aby byl transekt založen (kategorie les, hranice státu, okraje nepřístupných oblastí)

Očekávaná hodnota integrálu lokální hustoty (12) je shodná se skutečným úhrnem veličiny v  $D$  za předpokladu, že transekty nebo elementy populace jsou náhodně rotovány. Odhad s použitím (12) je nestranný nepodmíněně na orientaci transektu [Gregoire and Valentine, 2008, str. 285].

## Plocha plošných objektů, modifikace Kaiserova postupu

**Lokální hustota** pro odhad celkové plochy plošných objektů je dána [Gregoire and Valentine, 2008, příklad 9.8 od strany 294]

$$Y(x) = \frac{1}{L} \sum_{k \in \mathbb{L}_x} q_k(\theta_x) t_k. \quad (13)$$

- $L$  je **nominální délka transektu** v metrech
- $\mathbb{L}_x$  je **množina objektů vybraných transektem**
- $q_k(\theta_x)$  je **délka části transektu nacházející se uvnitř objektu  $k$**
- **definice  $q_k(\theta_x)$  odpovídá modifikaci Kaiserova transektu**, kterou navrhli Barabesi and Marcheselli [2008]
- při zde uvažované úpravě postupu je **plošný objekt vybrán vždy, pokud je protnut kteroukoli částí transektu bez ohledu na rozlišení čelních a výchozích konců transektu**

Lokální hustota (13) vyhovuje podmínkám (1) a (2). Odhad s použitím (13) je nestranný jak podmíněně tak i nepodmíněně na orientaci transektu [Gregoire and Valentine, 2008, sekce 9.2.2 a 9.2.3 od stran 283 a 285]. Tuto definici lokální hustoty lze použít i v případě nerotovaných transektů, aniž by bylo nutno předpokládat náhodnou orientaci elementů populace.



## Počet plošných objektů

**Lokální hustota** pro odhad **celkového počtu plošných objektů** je dána [Gregoire and Valentine, 2008, sekce 9.2.2 od strany 283]

$$Y(x) = \frac{1}{L} \sum_{k \in \mathbb{L}_x} \frac{t_k}{w_k(\theta_x)}. \quad (14)$$

- $L$  je **nominální délka transektu** v metrech
- $\mathbb{L}_x$  je **množina transektem vybraných objektů**
- zde je uvažován originální výběrový protokol dle Kaisera [1983]
- $w_k(\theta_x)$  je šířka objektu měřená jako **vzdálenost tečen objektu vedených rovnoběžně s linií transektu**

Lokální hustota (14) vyhovuje podmínkám (1) a (2). Odhad s použitím (14) je nestranný jak podmíněně tak i nepodmíněně na orientaci transektu [Gregoire and Valentine, 2008, sekce 9.2.2 a 9.2.3 od stran 283 a 285]. Tuto definici lokální hustoty lze použít i v případě nerotovaných transektů, aniž by bylo nutno předpokládat náhodnou orientaci elementů populace.



## Objem prostorových objektů, rotované transekty

**Lokální hustota** pro odhad celkového počtu plošných objektů je dána [Gregoire and Valentine, 2008, příklad 9.10 od strany 295]

$$Y(x) = \frac{\pi^2}{8L} \sum_{k \in \mathbb{L}_{x_i}} \frac{t_k a_k}{\cos \varphi_k}. \quad (15)$$

- $L$  je **nominální délka transektu** v metrech
- $\mathbb{L}_{x_i}$  je **množina transektem vybraných objektů**
- zde je uvažován originální výběrový protokol dle Kaisera [1983]
- $\pi$  je **Ludolfovo číslo**, nikoli výraz pro pravděpodobnost výběru elementu
- $a_k$  je **plocha průřezu objektu**  $k$  měřená kolmo na podélnou osu objektu v místě protnutí transektem
- $\varphi_k$  je **úhel, který svírá podélná osa objektu s vodorovnou rovinou**

Očekávaná hodnota integrálu lokální hustoty (15) je shodná se skutečným úhrnem veličiny v  $D$  za předpokladu, že transekty nebo elementy populace jsou náhodně rotovány. Odhad s použitím (15) je nestranný nepodmíněně na orientaci transektu [Gregoire and Valentine, 2008, str. 285].

## Generalizovaná lokální hustota

- **dvoustupňový výběr** na úrovni inventarizační plochy
- měření výšek na výběru registrovaných kmenů
- reference Mandallaz [2007, sekce 4.4 od strany 69]

## Uspořádání inventarizačních bodů v traktech

- **trakt** je odvozen od inventarizačního bodu na základě **pevně daného počtu pevně daných vektorů posunu**
- reference Mandallaz [2007, sekce 4.3 od strany 65], Gregoire and Valentine [2008, sekce 7 od strany 207]



## Segmentované transeky

- **transekt tvoří více segmentů** uspořádaných do tvaru geometrického obrazce (čtverec, Mercedes Y, kříž apod.)
- **menší riziko extrémního odhadu** vlivem koincidence směru objektů se směrem jednoduchého transektu (je-li pevně dán)
- reference Affleck et al. [2005], Gregoire and Valentine [2008, sekce 9.8 od strany 301]



- D. L. R. Affleck, T. G. Gregoire, and H. T. Valentine. Design unbiased estimation in line intersect sampling using segmented transects. *Environmental and Ecological Statistics*, 12:139–154, 2005.
- L. Barabesi and M. Marcheselli. Improved strategies for coverage estimation by using replicated line-intercept sampling. *Environmental and Ecological Statistics*, 15: 215–239, 2008.
- C. B. Cordy. An extension of the horwitz=thompson theorem to pint sampling from a continuous universe. *Statistics and Probability Letters*, 18:353–362, 1993.
- T. G. Gregoire and H. T. Valentine. *Sampling Strategies For Natural Resources and The Environment*. Chapman and Hall/CRC, 2008.
- L. Kaiser. Unbiased estimation in line-intercept sampling. *Biometrics*, 39:965–976, 1983.
- D. Mandallaz. *A unified approach to sampling theory for forest inventory based on infinite population and superpopulation models*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, 1991.
- D. Mandallaz. *Sampling Techniques For Forest Inventories*. Chapman and Hall/CRC, 2007.



Vytvořeno s podporou projektu „Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu“ (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Děkuji za Vaši pozornost!



- Co Vás na přednášce zaujalo?
- Čím by jste přednášku doplnili?
- Další dotazy a připomínky k tématu NIL?

